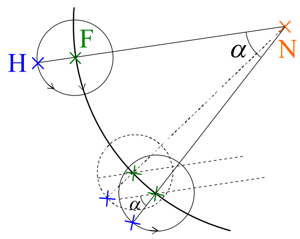
FIZIKA PONTVERSENY **5. forduló** **Megoldások**

1. Bizony növelheti – hiszen pl. a gyaloglást is a (tapadási) súrlódás teszi lehetővé. (Vagy ld. – klasszikus példa –a teríték alól kirántott abroszt. Ha ügyetlenül rántjuk ki, lerepülnek az edények is az asztalról.) A súrlódási együttható a felületek érdességétől függ: akár két durván megmunkált fadarab, vagy nagyszemű smirgli között is lehet nagyobb 1-nél – de pl. a tépőzárhoz hasonlóan „egymásba akadó” felületi alakzatok esetén aztán biztosan az. (Vagy pl. a ragasztó esetén...) *(4 pont)*

2. Vizsgáljuk a dobozt a tartalmával együtt. A szájával felfelé (csónakként) úszó doboz tartalma csak levegő, a szájával lefelé (harangként) úszóba viszont valamennyi víz is behatol (és összenyomja a bent lévő levegőt). Ezért ez utóbbinak nagyobb a tömege, így a sűrűsége is, tehát mélyebbre merül. A hőmérséklet emelkedése (túl a vízen és a dobozon okozott hőtáguláson, ami egyrészt elhanyagolható, másrészt a két esetben egyforma) a szájával lefelé úszó dobozba zárt levegő tágulását eredményezi, amitől az kissé megemelkedik – de még így is mélyebbre merül, mint a felfelé nyitott doboz. *(5 pont)*

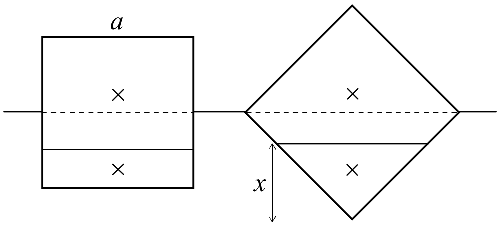
3. A test sűrűsége tehát negyede a higanyénak, 3,4 kg/dm^3. A másik esetben a test h magasságából x merül a higanyba, így $h–x$ vastag a vízréteg. A két felhajtóerő tart egyensúlyt a gravitációval, ezt felírva (az ismeretlen A keresztmetszetet, a g-t és a sűrűség mértékegységét kiejtve):
$x\cdot 13{,}6 + (h–x)\cdot 1 = h\cdot 3{,}4$, amiből $\dfrac{x}{h} = \dfrac{2{,}4}{12{,}6} = \dfrac{4}{21}$ ($\approx 0{,}19$), ez a bemerülő és a teljes térfogat aránya is. *(6 pont)*

4. A „Nap-nap” (szoláris nap) semelyik égitesten nem azonos a „csillag-nappal” (sztelláris nap), vagyis amennyi idő alatt az égitest 360°-ot fordul a tengelye körül. A Hold egy teljes körülfordulása (és egyben a Föld megkerülése) alatt ugyanis a Föld már továbbhaladt a Nap körüli pályáján, így az előző „napon” még a Napra nézővel párhuzamos irány ma még nem arra néz. Ehhez a Földnek még tovább kell haladnia a pályáján, és a Holdnak körülötte. A két delelés közti időben a Föld α szöggel haladt tovább a Nap körül, míg a Hold 360°+α szöggel a Föld körül. Ekkor (legyen F és H a két keringési periódusidő): $\dfrac{\alpha}{360°}F = \dfrac{360°+\alpha}{360°}H$, amiből $\alpha = 360°\dfrac{H}{F-H}$ (ez 29,1°, de számszerűen nem érdekes), ezt visszaírva a keresett keringési idő $\dfrac{FH}{F-H} = 29^d\ 12^h\ 44^m\ 10{,}77^s$. (Ez a csillagászati idő-jelölés.) *(6 pont)*



5. (Ld. az előző forduló(k) levezetéseit, jelöléseit.) A lejtőt „hátrafelé” elmozdító erő:
$T_v–S_v = \dfrac{b(h-\mu b)}{\ell^2}G$. Ahhoz, hogy ez „előrefelé” mutasson, $h–\mu b < 0$ kellene, azaz $\dfrac{h}{b} < \mu$.
Azonban ilyenkor a téglára ható súrlódási erő ($S = \mu\dfrac{b}{\ell}G$) is nagyobb lenne az őt lejtőn lefelé mozgatni igyekvő erőnél (az eddigi jelölések szerint: $K = \dfrac{h}{\ell}G$), ami (hajlásszögtől, tömegaránytól, μ-től függetlenül) lehetetlen. (A tégla ilyenkor le sem csúszik, áll a lejtőn, a rá ható tapadási súrlódási erő kisebb a lehetséges maximumnál, épp egyenlő az imént említett K-val.) Egy furmányos megoldás kínálkozik: ha egy ilyen (azaz $\dfrac{h}{b} < \mu$) lejtőn az amúgy álló téglát lefelé meglökjük, amíg (lassulva) csúszik lefelé, $T_v < S_v$ teljesül és a lejtő is „előrefelé” csúszik a

talajon. (Ha az S_v–T_v különbség elegendő a lejtő és a talaj közti súrlódási erő legyőzéséhez, ami: $\mu_{\text{lejtő,talaj}}\left(m_{\text{test}}\dfrac{\ell^2-h^2+\mu hb}{\ell^2}+m_{\text{lejtő}}\right)g$ ☺) *(6 pont)*



6. Válasszuk a helyzeti energia 0-szintjének a víz szintjét. Ez a két esetben ugyanott van, hiszen a vízkiszorítás megegyezik.. A doboz anyagának súlypontja mindkétszer a víz színén van, helyzeti energiája tehát 0. A benne lévő vízé az első esetben $-\dfrac{3}{8}a = -0{,}375a$ magasságban (mélységben) van. A második esetben jelölt x a fél átló $\sqrt{2}$-ed része, vagyis $\dfrac{a}{2}$, és a víz súlypontja ennek a csúcs feletti $\dfrac{2}{3}$ részében van, vagyis a vízszinthez képest $-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{3}\right)a \approx$ $\approx -0{,}374a$ magasságban van, tehát egy árnyalatnyival feljebb, mint az első esetben. A korrekt megoldáshoz azonban hozzátartozik a dobozban lévő levegő vizsgálata is! Az első esetben súlypontja a vízszint felett $\dfrac{1}{8}a$ magasságban van. (És általában mindig harmadrészt olyan magasan, mint amilyen mélyen a vízé, mert térfogata háromszorosa a vízének.) A második esetben ezért $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{a}{3}$ ez a magasság. A helyzeti energiák így $\left(-\dfrac{3}{8}m_{\text{víz}}+\dfrac{1}{8}m_{\text{lev}}\right)ag$ és $\left(-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{3}\right)m_{\text{víz}}+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}-\dfrac{1}{9}\right)m_{\text{lev}}\right)ag$. Mivel a víz sűrűsége kb. 780-szorosa a levegőének, térfogata viszont a harmada, így $m_{\text{víz}} = 260m_{\text{lev}}$. Mivel csak a két mennyiség nagysági viszonya a kérdés, így a $-\dfrac{3}{8}\cdot 260+\dfrac{1}{8}$ és a $-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{3}\right)\cdot 260+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}-\dfrac{1}{9}\right)$ számokat kell összehasonlítani. Előbbi –97,375, utóbbi kb. –97,057 – tehát a levegőt beszámítva is az első esetben van lejjebb a súlypont, itt kisebb a helyzeti energia. *(8 pont)*

(Ami pl. azt is jelenti, hogy az első helyzetből a másodikba átbillenteni a vízen úszó dobozt energia-befektetéssel jár.)

7. (Az „eszelős” kiindulási adatokra azért van szükség, hogy minden későbbi eredmény „szép” egész legyen.) Az elhajított test helyzete általánosan: $x = v_0\cdot\cos\alpha\cdot t$ és $y = v_0\cdot\sin\alpha\cdot t-\dfrac{g}{2}t^2$, most számszerűen (az SI-egységeket elhagyva) $x = 75t$ és $y = 130t-5t^2$. Ekkor $t = 10$ esetén $x = 750$, $y = 800$, vagyis a test a robbanáskor a (750; 800) pontban van. A két darab szétrepül, de a súlypont az eredeti pályán mozog tovább (a robbanást okozó belső erő ezt nem tudja megváltoztatni). Ezért a súlypont helye $t = 20$ esetén: $x = 1500$, $y = 600$. Ez a pont 2:1 arányban osztja az m és a $2m$ tömegű test helyét összekötő szakaszt, ami ugyanígy igaz az x és y koordinátákra: $\dfrac{-500+2x_{2m}}{3} = 1500$ és $\dfrac{0+2y_{2m}}{3} = 600$, amikből a $2m$ tömegű test helye: (2500; 900).

Az eredeti test (súlypontjának) pályája (kifejezve x-ből t-t, beírva y-ba): $y = 130\dfrac{x}{75}-5\cdot\left(\dfrac{x}{75}\right)^2$, azaz $y = -\dfrac{x^2}{1125}+\dfrac{26}{15}x = -0{,}000\dot{8}\,x^2+1{,}7\dot{3}\,x = -0{,}000\dot{8}\,(x-975)^2+845$.

(Igazából a pályaegyenlet csak $x\in[0; 750]$ esetén írja le a valódi mozgást, de a további szakasza is érdekes. Az ábrán kékkel.)

A (750; 800) pontban bekövetkezik a robbanás. Innen az első (m tömegű) test balra repül, a vízszintessel β szöget bezáró, (a talajhoz képest) v_1 kezdősebességgel; a második ($2m$ tömegű) test jobbra repül, a vízszintessel γ szöget bezáró, (a talajhoz képest) v_2 sebességgel.

Az első test mozgását leíró egyenletek (balra repül!): $v_{1x} = -v_1\cdot\cos\beta$, $v_{1y} = v_1\cdot\sin\beta - gt$ (az időt újra kezdjük mérni a robbanáskor); $x_1 = -v_1\cdot\cos\beta\cdot t$, $y_1 = v_1\cdot\sin\beta\cdot t - \frac{g}{2}t^2$ [vigyázat, a (750; 800) pontból számítva!]. Mivel a test balra repülve 10 (s) alatt eljut a 750 abszcisszájú pontból a –500 abszcisszájú pontba, azaz megtesz vízszintesen –1250 (m)-t, ezért $v_{1x} = -125$. Ezalatt függőlegesen a 800 ordinátájú pontból a 0 ordinátájú pontba jut, azaz $y_1(10) = 10\cdot v_1\cdot\sin\beta - 500 = -800$. Ebből következik, hogy $v_1\cdot\sin\beta = -30$. (Hoppá, β negatív! Mégpedig arctg $\frac{-30}{125} = -13{,}5°$.) Vagyis $x_1 = -125t$ és $y_1 = -30t - 5t^2$. A test pályája (x_1-ből kifejezve t-t, beírva y_1-be): $y_1 = -30\cdot\frac{-x_1}{125} - 5\cdot\left(\frac{-x_1}{125}\right)^2$. Figyelembe véve, hogy a (750; 800) pontból indul a test, az eredetivel azonos koordinátarendszerben pályájának egyenlete:

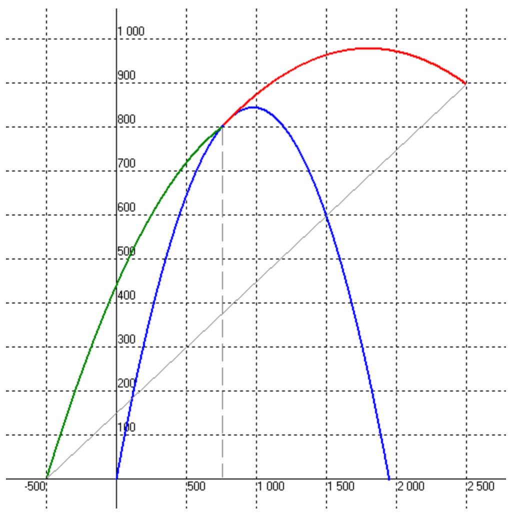
$y = -\frac{(x-750)^2}{3125} + \frac{30}{125}(x-750) + 800$, rendezve: $\underline{\underline{y = -\frac{x^2}{3125} + \frac{18}{25}x + 440}}$, másképp:

$y = -0{,}00032x^2 + 0{,}72x + 440 = -0{,}00032(x-1125)^2 + 845$. (Mindez $x\in[-500; 750]$ esetén, zölddel.)

A második test mozgását leíró egyenletek (jobbra repül!): $v_{2x} = v_2\cdot\cos\gamma$, $v_{2y} = v_2\cdot\sin\gamma - gt$ (az időt újra kezdjük mérni a robbanáskor); $x_2 = v_2\cdot\cos\gamma\cdot t$, $y_2 = v_2\cdot\sin\gamma\cdot t - \frac{g}{2}t^2$ [szintén a (750; 800) pontból számítva]. Mivel a test jobbra repülve 10 (s) alatt eljut a 750 abszcisszájú pontból a 2500 abszcisszájú pontba, azaz megtesz vízszintesen 1750 (m)-t, ezért $v_{2x} = 175$. Ezalatt függőlegesen a 800 ordinátájú pontból a 900 ordinátájú pontba jut, azaz $y_2(10) = 10\cdot v_2\cdot\sin\gamma - 500 = 100$. Ebből következik, hogy $v_2\cdot\sin\gamma = 60$ ($\gamma = $ arctg $\frac{60}{175} = 18{,}9°$). Vagyis $x_2 = 175t$ és $y_2 = 60t - 5t^2$. A test pályája (x_2-ből kifejezve t-t, beírva y_2-be): $y_2 = 60\cdot\frac{x_2}{175} - 5\cdot\left(\frac{x_2}{175}\right)^2$. Figyelembe véve, hogy a (750; 800) pontból indul a test, az eredetivel azonos koordinátarendszerben pályájának egyenlete: $y = -\frac{(x-750)^2}{6125} + \frac{60}{175}(x-750) + 800$, rendezve: $\underline{\underline{y = -\frac{1}{6125}x^2 + \frac{144}{245}x + \frac{22100}{49}}}$, másképp: $y = -\frac{1}{6125}(x-1800)^2 + 980$. (Mindez $x\in[750; 2500]$ esetén, pirossal.)

A két test végső helyzetét összekötő szakasz és az eredeti röppálya metszéspontjában ott a súlypont $t = 20$ esetén kiszámított (1500; 600) helyzete, 2:1 arányban osztva a szakaszt.

A $2m$ tömegű testnek a földet éréshez a szétrobbanástól számítva függőlegesen zuhannia kell még 800 (m)-t: $y_2 = 60t - 5t^2 = 800$, amiből $t = 20$ (s, vagy –8 s, ez most hamis gyök, de egy későbbi továbbgondoláshoz jól jöhet ☺), ezalatt vízszintesen megtesz $d = v_{2x}t = 175\cdot 20 = 3500$ (m) utat, vagyis végül a kilövéstől számított <u>30 s</u> múlva, a (<u>4250</u>; 0) pontban ér földet. *(11 pont)*



EREDMÉNYEK

			1	2	3	4	5	6	7	Σ	próba	teljes
	példa		1	2	3	4	5	6	7	Σ	próba	teljes
	pont		4	5	6	6	6	8	11	46		pont
1	Gyűrűs Boldizsár	12.Amf	4	4	6	6	6	8	11	45	7	6
2	Kozák András	10.C	4	1	6	6	5	8	11	41	7	5
3	Herczeg Donát	12.Amf	4	4	6	6	4	7	9	40	7	3
4	Németh Csaba	11.Amf	3	2	6	4	3	1	2	21	7	1
5	Vass Bence	10.Bbi	4	3	3	–	5	2	2	19	6	1
6	Keltai Dóra	11.Amf	2	2	6	–	–	4	3	17	5	1
	próba		6	6	6	4	5	6	6	39	39	
	teljes pontszám		4	0	5	3	1	2	2	17		17
	átlag pontszám		3,5	2,7	5,5	3,7	3,8	5,0	6,3	30,5	6,5	2,8

	Összesítés 5 forduló után		218
1	Kozák András	10.C	187
2	Gyűrűs Boldizsár	12.Amf	184
3	Herczeg Donát	12.Amf	167
4	Németh Csaba	11.Amf	131
5	Keltai Dóra	11.Amf	121
6	Vass Bence	10.Bbi	95
7	Schrott Márton	11.Amf	36
7	Zeke Norbert	11.Amf	36
9	Mátyás Dávid	12.Amf	25
10	Rimai Dániel	12.Amf	23
11	Boros Máté	11.Amf	21
12	Ocskó Luca	11.Amf	19
13	Császár András	12.Amf	17
14	Conrád Márk	11.Amf	16
15	Osvárt Bence	11.Amf	14
16	Solymosi Réka	11.Amf	9
17	Gál Péter	11.Amf	7
18	Roskó Kristóf	11.Amf	6
19	Kovács Balázs	9.Amf	3

Fogy a mezőny… Viszont a még talpon maradottak derekasan küzdenek.

Az 1. példa megy, a 2.-ban nincs igazán precíz megoldás. A 3. és a 4. megint jó. Az 5.-ben csak Boldinak van igazi ötlete, hogyan történhet mégis ilyesmi. A 6.-ban a levegőt igenis be kell számítani, mert az ellenkező irányban módosítja az addigi eredményt, igaz, csekély mértékben – de amíg nem számoljuk ki, ezt nem lehet előre kijelenteni. A 7. igazi csemege, tovább is görgetem a következő fordulókban. (Az eddigi megoldás szolgáljon kiindulásul.)

Nagyon izgalmas az élmezőny, eddig csak András vagy Boldi nyert fordulót. Szeretném, ha visszatérnének korábbi versenyzők és csatlakoznának még újak is. Nem(csak) a győzelem a fontos…

(A vicces Csaba késve adta le a megoldásait, de aranyos tanárbácsi vagyok, és figyelembe vettem…)

Siposs András